

УДК 519.63:532.55

**А.В. Никитина, М.В. Третьякова**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА АЛЬГОЛИЗАЦИИ МЕЛКОВОДНОГО  
ВОДОЁМА ПУТЁМ ВСЕЛЕНИЯ В НЕГО ШТАММА ЗЕЛЁНОЙ  
ВОДОРОСЛИ CHLORELLA VULGARIS BIN**

*Разработанная математическая модель представляет собой совокупность наукоёмких данных, которые были опубликованы в ряде статей и научных изданий. Она учитывает движение водной среды, микротурбулентное движение среды, солёность, температуру, кислородный режим и механизм наружно гормонального стимулирования. Решение модельной задачи, используемой для диагностики экологической ситуации в Азовском море и Таганрогском заливе, является устойчивым и позволяет проводить вычислительные эксперименты с верификационными данными в широком диапазоне значений управляющих параметров. Результаты работы показали, что применение водоросли Chlorella Vulgaris BIN для альголизации мелководных водоёмов поможет улучшить качество их вод.*

*Альголизация; математическая модель; зелёные водоросли; токсичные сине-зелёные водоросли; экология; Азовское море; Таганрогский залив.*

**A.V. Nikitina, M.V. Tretyakova**

**MODELING OF ALGOLIZATION PROCESS FOR SHALLOW RESERVOIRS  
WITH THE USE OF ALGAE CHLORELLA VULGARIS BIN**

*The developed mathematical model is a combination of high-tech data, which were published in several articles and scientific publications. It considers the movement of the aquatic environment, microturbulence environment motion, salinity, temperature, oxygen conditions and mechanism of outer hormonal stimulation. The solution of the model problem used to diagnose the environmental situation in the Azov Sea and the Taganrog Bay is stable and allows for computational experiments with the verification data in a wide range of control parameters. The results indicate that the use of algae Chlorella Vulgaris BIN for algolization of shallow reservoirs will help to improve the quality of their waters.*

*Algolization; mathematical model; green algae; toxic blue-green algae; ecology; Azov Sea; Taganrog Bay.*

Цель работы состояла в построении вычислительно-устойчивых алгоритмов реализации модели взаимодействия зелёных и сине-зелёных водорослей, учитывающих движение водной среды, микротурбулентную диффузию, температурный, кислородный режимы, солёность и механизм наружно-гормонального стимулирования в реальных областях сложной формы – Азовское море и Таганрогский залив [2].

В качестве объектов моделирования были выбраны 2 вида водорослей – токсичная сине-зелёная и зелёная, зоопланктон. Модель также учитывает пространственно-неоднородное распределение биогенных веществ и метаболитов водорослей.

Токсичные сине-зелёные водоросли типичны преимущественно для Таганрогского залива, в котором образуется 80–90 % биомассы фитопланктона Азовского моря. При максимальном развитии Aphanizomenon, вызывающий «цветение воды», даёт 5–6 млн особей в 1 м<sup>3</sup> воды. Этот вид водоросли продуцирует сильнодействующий токсин, опасный для здоровья людей и животных. Токсичность увеличивается с увеличением возраста и плотности культуры, температуры и освещённости. Токсин также является эндотоксином, который сохраняется внутри здоровых клеток и высвобождается только после их лизиса. Он является очень актив-

ным блокирующим агентом для нервной и мышечной тканей, нарушающим их проводимость. Сине-зеленая водоросль *Aphanizomenon* употребляется в пищу рыбами вынужденно, обладает травматическим действием и ввиду ее нитчатой формы плохо усваивается органами пищеварения. Кислород, воспроизводимый водорослями в процессе фотосинтеза, в воде не удерживается: нановодоросли расходуют его больше, чем производят. В результате возникают летние ночные заморы рыб, массовая гибель бентосных, планктонных и нейстонных животных [3].

Зелёная водоросль *Chlorella Vulgaris* BIN, проявляющая антагонизм к токсичным сине-зеленым водорослям, может быть использована для альголизации мелководного водоема с целью улучшения качества его вод. Попадая в водоем, *Chlorella vulgaris* BIN не осаждаётся на дно и не прилипает к высшей растительности, а парит в верхнем (до 40–60 сантиметров) слое воды, интенсивно фотосинтезируя и делясь. В процессе фотосинтеза хлорелла способна использовать до 12 % световой энергии, в то время как наземные растения используют только 1–2 %. За несколько дней хлорелла становится доминирующей микроводорослью в указанном слое воды, насыщая его кислородом и удаляя из него излишки углекислого газа, органических и неорганических веществ [4]. При этом уничтожается вся патогенная микрофлора при достаточном количестве света. Это касается любой микроводоросли, рядом с которой обитают только свои бактерии-спутники, а другие она ликвидирует. Так вот у хлореллы нет бактерий-спутников – патогенов. Поскольку хлорелла является наилучшим кормом для зоопланктона, то численность его в водоеме увеличивается в разы. При альголизации водоема в весенние месяцы массового развития сине-зеленых водорослей не происходит, так как хлорелла успевает поглотить биогены, необходимые для их развития. Когда водоем уже заражен сине-зелеными водорослями, введение штамма хлореллы позволяет лизировать их скопления и перевести продукты разложения в процессе фотосинтеза в белок, липиды, и т. д., входящие в структуру хлореллы.

В модели, помимо вышеперечисленных водорослей *Aphanizomenon* и *Chlorella vulgaris* BIN, значительную роль играет зоопланктон – *Bosmina longirostris*, который способен употреблять в пищу как зеленые, так и сине-зеленые водоросли, тем самым снижая их концентрацию.

Концентрация биогенов в Таганрогском заливе и собственно Азовском море практически никогда не достигает аналитического нуля, поэтому азот и фосфор постоянно присутствуют в форме, доступной для нано- и микроводорослей [5].

В модели также учитывается взаимодействие самих водных популяций фито- и зоопланктона, влияние метаболита, выделяемого фитопланктоном. В качестве биогенного вещества, стимулирующего рост сине-зеленых водорослей, может быть рассмотрен азот или фосфор. Значения солености, температуры, поле скоростей водного потока являются входными данными [1].

Рассмотрим систему уравнений, описывающую процесс динамики численности водных популяций фито- и зоопланктона в некоторой трехмерной области  $\bar{G}$ , представляющей собой замкнутый бассейн, ограниченный невозмущенной поверхностью водоема  $\Sigma_0$ , дном  $\Sigma_n = \Sigma_n(x, y)$  и цилиндрической боковой поверхностью  $\sigma$  для временного интервала  $0 < t \leq T$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot X_1) = \mu_1 \Delta X_1 + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} \right) + \alpha_1 S X_1 - \delta_1 X_1 Z - \theta_1 X_1 X_2 - \varepsilon_1 X_1, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot X_2) = \mu_2 \Delta X_2 + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_2 \frac{\partial X_2}{\partial z} \right) + \alpha_2 S X_2 - \delta_2 X_2 Z - \theta_2 X_1 X_2 - \varepsilon_2 X_2, \\ \frac{\partial Z}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot Z) = \mu_z \Delta Z + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_z \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + p_1 X_1 Z - p_2 X_2 Z - \varepsilon_z M_2 Z, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot S) = \mu_s \Delta S + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_s \frac{\partial S}{\partial z} \right) - \beta_1 X_1 S - \beta_2 X_2 S + \varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2 + \varepsilon_z (\lambda M_2) Z + B(S_p - S) + f, \\ \frac{\partial M_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot M_1) = \mu_3 \Delta M_1 + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_3 \frac{\partial M_1}{\partial z} \right) + k_1 X_1 - \varepsilon_3 M_1, \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \cdot M_2) = \mu_4 \Delta M_2 + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_4 \frac{\partial M_2}{\partial z} \right) + k_2 X_2 - \varepsilon_4 M_2. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) приняты обозначения:  $X_m$  – концентрация зеленых (*Chlorella Vulgaris* BIN) и сине-зеленых водорослей (*Aphanizomenon*) соответственно,  $m = \overline{1,2}$ ;  $Z$  – концентрация зоопланктона (*Bosmina Longirostris*);  $S$  – биогенное вещество;  $M_m$  – концентрация метаболита зеленых и сине-зеленых водорослей соответственно;  $\bar{u} = (u, v, w)$  – поле скоростей водного потока;  $\mu_m, \mu_z, \mu_s$  – диффузионные коэффициенты в горизонтальном направлении субстанций  $X_m, Z, S, M_m, m = \overline{1,4}$ ;  $v_m, v_z, v_s$  – диффузионные коэффициенты в вертикальном направлении субстанций  $X_m, Z, S, M_m$ ;  $\alpha_m$  – функция роста зеленых и сине-зеленых водорослей соответственно,  $m = \overline{1,2}$ ;  $\beta_m$  – коэффициенты выедания биогенного вещества фитопланктоном;  $\delta_m$  – коэффициенты переработки биомассы водорослей  $m$ -го вида в биомассу зоопланктона,  $\delta_1 \gg \delta_2$  (зоопланктон предпочитает зеленые водоросли, сине-зеленые ест вынужденно);  $\theta_m$  – коэффициент межвидовой конкуренции зеленых и сине-зеленых водорослей;  $p_m$  – коэффициенты переработанной биомассы водорослей  $m$ -го вида в биомассу зоопланктона;  $B$  – скорость поступления биогенного вещества;  $S_p$  – предельно возможная концентрация биогенного вещества;  $\varepsilon_m$  – коэффициенты смертности фитопланктона,  $m = \overline{1,2}$ ;  $\lambda$  – функция смертности зоопланктона, включающая в себя риск элиминации за счет метаболита сине-зеленой водоросли;  $f$  – функция источника загрязнения;  $\varepsilon_m$  – коэффициенты разложения метаболита,  $m = \overline{3,4}$ ;  $k_m$  – коэффициенты экскреции,  $m = \overline{1,2}$ .

К системе (1) необходимо добавить начальные и граничные условия.

Пусть  $n$  – вектор внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ ,  $U_n$  – нормальная по отношению к  $\Sigma$  составляющая вектора скорости водного потока. Зададим начальные и граничные условия.

Начальные условия имели вид

$$\begin{aligned} X_m(x, y, z, 0) &= X_{m_0}(x, y, z); \\ Z(x, y, z, 0) &= Z_0(x, y, z); \end{aligned}$$

$$S(x, y, z, 0) = S_0(x, y, z);$$

$$M_m(x, y, z, 0) = M_{m0}(x, y, z), (x, y, z) \in \bar{G}, t = 0.$$

Граничные условия были заданы в следующем виде:

$$X_m = Z = S = M_m = 0 \text{ на } \sigma, \text{ если } U_n < 0;$$

$$\frac{\partial X_m}{\partial n} = 0, \frac{\partial Z}{\partial n} = 0, \frac{\partial S}{\partial n} = 0, \frac{\partial M_m}{\partial n} = 0 \text{ на } \sigma, \text{ если } U_n \geq 0;$$

$$\frac{\partial X_m}{\partial z} = 0, \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \frac{\partial M_m}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_0;$$

$$\frac{\partial X_m}{\partial z} = -\xi_m X_m, m=\overline{1,2}, \frac{\partial Z}{\partial z} = -\xi_z Z, \frac{\partial S}{\partial z} = -\xi_s S, \frac{\partial M_m}{\partial z} = -\xi_m M_m, m=\overline{1,4},$$

на  $\Sigma_n$ ;

где  $\xi_m, \xi_z, \xi_s, m=\overline{1,4}$  – неотрицательные постоянные;  $\xi_1, \xi_2$  учитывают опускание водорослей на дно и их затопление;  $\xi_z$  учитывает элиминацию зоопланктона и опускание его на дно;  $\xi_s, \xi_3, \xi_4$  учитывают поглощение биогенного вещества и метаболитов зеленых и сине-зеленых водорослей донными отложениями.

При задании граничных условий учитывался водообмен Таганрогского залива с Азовским морем.

Проведено исследование дискретной модели взаимодействия токсичных сине-зеленых и зеленых водорослей в Азовском море и Таганрогском заливе. Определены условия устойчивости схемы, реализующей построенную модель [6]. Создан комплекс программ на языке C++, реализующий построенную модель. Результаты численного эксперимента с верификационными данными, которые были получены при проведении научно-исследовательских экспедиций в 2000–2010 гг. сотрудниками кафедры ВМ, представлены на рис. 1–3.

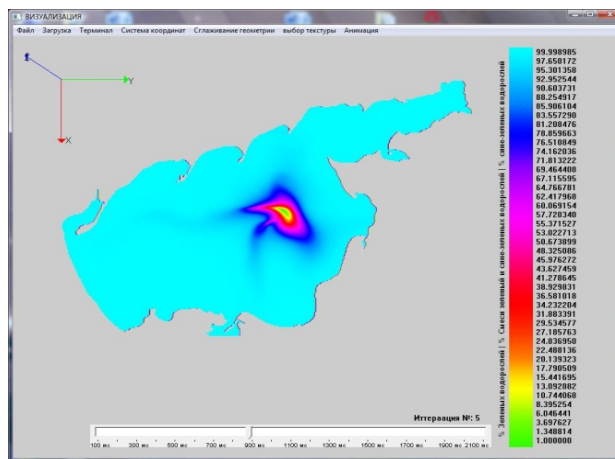


Рис. 1. Распределение концентрации зелёных и сине-зелёных водорослей в начальный момент времени

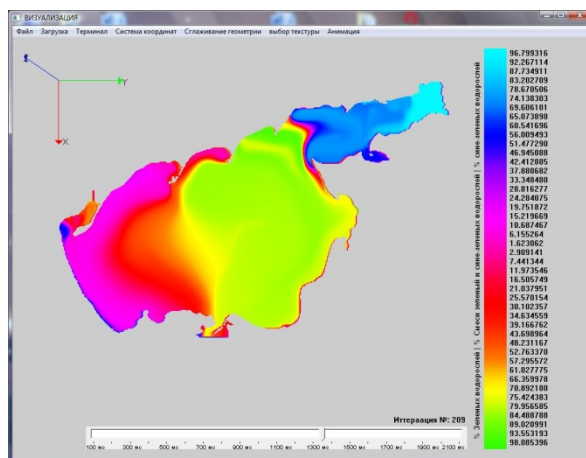


Рис. 2. Распределение концентрации зелёных и сине-зелёных водорослей в промежуточный момент времени

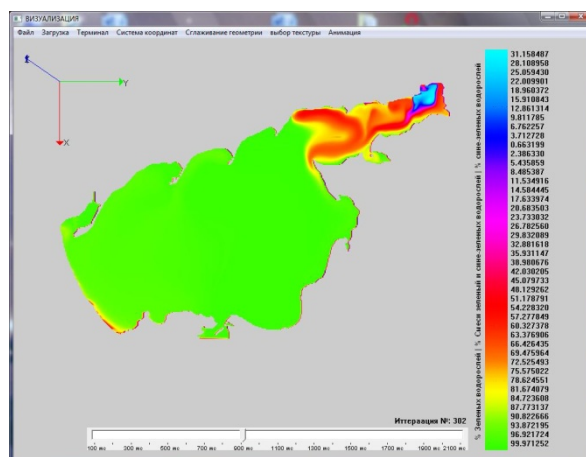


Рис. 3. Распределение концентрации зелёных и сине-зелёных водорослей в конечный момент времени

По полученным результатам можно судить о том, что при альголизации Азовского моря и Таганрогского залива концентрация зелёных водорослей увеличилась, а токсичных сине-зелёных водорослей уменьшилась.

Данные модели биологической кинетики могут использоваться научно-исследовательскими институтами и рыбными хозяйствами с целью уменьшения затрат на натурные эксперименты. С помощью построенных моделей можно провести оценку, анализ и прогнозирование экологического состояния мелководных водоемов – Азовского моря и Таганрогского залива. В России они наиболее опасны с точки зрения развития ядовитых видов фитопланктона.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3-21.

2. *Никитина А.В.* Численное решение задачи динамики токсичных водорослей в Таганрогском заливе // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. – № 6 (107). – С. 113-116.
3. *Матишов Г.Г., Фуштей Т.В.* К проблеме вредоносных «цветений воды» в Азовском море // Электронный журнал «Исследовано в России». – 2003. – С. 213-225.
4. *Ластивка Т.В.* Сезонная динамика фитопланктона. Современное развитие эстуарных экосистем на примере Азовского моря. – Апатиты: Изд-во КНЦ РАН, 1999. – С. 73-95.
5. *Роговая О.Г.* Экологическое моделирование. – СПб.: ООО «Книжный мир», 2007. – 104 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Статью рекомендовал к опубликованию д.ф.-м.н., профессор А.И. Жорник.

**Никитина Алла Валерьевна** – Технологический институт федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Южный федеральный университет» в г. Таганроге; e-mail: [nikitina.vm@gmail.com](mailto:nikitina.vm@gmail.com); 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44; тел.: 88634371606; кафедра высшей математики; зав. кафедрой; доцент.

**Третьякова Мария Валерьевна** – студентка.

**Nikitina Alla Valerievna** – Taganrog Institute of Technology – Federal State-Owned Autonomy Educational Establishment of Higher Vocational Education “Southern Federal University”; e-mail: [nikitina.vm@gmail.com](mailto:nikitina.vm@gmail.com); 44, Nekrasovsky, Taganrog 347928, Russia; phone: +78634371606; the department of higher mathematics; head of department; associate professor.

**Tretyakova Maria Valerievna** – student.

УДК 519.85:004.421

**А.П. Попов**

### **ПОИСК РЕШЕНИЯ КАК ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС**

*Обсуждаются условия, которые должны удовлетворяться для того, чтобы поиск решения тестовых заданий можно было рассматривать как однородный во времени (пуассоновский) стохастический процесс. Тщательное изучение эмпирических распределений времени, необходимого для поиска верных ответов на тестовые задания, позволяют сделать заключение о том, что все эти эмпирические распределения принадлежат к хорошо известному классу гамма распределений. Плотность гамма распределения зависит от двух параметров: в рамках модели безразмерный параметр  $\alpha$  интерпретируется как трудность тестового задания, а параметр  $\lambda$ , который имеет размерность обратного времени, ассоциируется с уровнем подготовленности испытуемого.*

*Время поиска решения тестовых заданий; однородный во времени процесс; сравнение эмпирических распределений с теоретическими зависимостями.*

**А.Р. Попов**

### **SEARCH OF SOLUTION AS POISSON'S PROCESS**

*There are discussed conditions which must be satisfied for one can consider the search of test tasks solutions as time homogenous (Poisson's) stochastic process. Careful studying of empirical distributions of times required for searching of true answers on test tasks allows making conclusion that all these empirical distributions are possessed to well known class of gamma distributions. Density of gamma distributions depends on two parameters: in framework of model dimensionless parameter  $\alpha$  is interpreted difficulties of test task, and parameter  $\lambda$ , which has a dimension of inverse time, is associated with level of training of participant of trial.*

*Times of search of test tasks solutions; time homogenous process; comparison of empirical distributions with theoretical dependences.*